УДК 681.3

ГЛОМОЗДА Д. К.

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ІНВАРІАНТІВ ДО АНАЛІЗУ КОЛЬОРОВИХ МЕРЕЖ ПЕТРІ ІЗ ДЕДЛОКАМИ

В роботі описано застосування методу інваріантів, що використовує алгоритм пошуку зрізаної множини розв'язків рівняння стану мережі Петрі, яке записується у вигляді систем лінійних однорідних діофантових рівнянь, до аналізу кольорових мереж Петрі, які містять дедлоки, на прикладі моделі функціонування багатопоточності в мові програмування Java за шаблоном «виробники/споживачі» з використанням комбінації методів `wait()/notify()`.

Application of invariants method, which uses Truncated Set of Solutions finding algorithm for Petri net state equations expressed through systems of linear homogenous Diophantine equations to analysis of colored Petri nets containing deadlocks is described in the article based on the models of multithreading in Java according to producers-consumers patter using `wait()/notify()` methods combination is covered.

Ключові слова: кольорові мережі Петрі, S-інваріанти, T-інваріанти, діофантові рівняння, багатопоточність.

Вступ

Мережі Петрі (МП) та їх розширення, зокрема кольорові мережі Петрі (КМП), є потужним та популярним засобом моделювання та дослідження властивостей складних динамічних розподілених та паралельних систем [1], бізнес-процесів [2], високопродуктивних IT-інфраструктур [3], навчальних та колаборативних середовищ [4, 5]. Інтерактивні автоматизовані системи їх побудови та аналізу на кшталт зв'язки графічного редактора PM Editeur [6] з Petri Nets Toolbox [7] для класичних (або чистих) МП та CPN Tools [8] для КМП користуються великою популярністю, що створює попит на ефективні алгоритми визначення їхніх властивостей.

Одним з таких є алгоритм визначення мінімальної породжуючої множини S- та T-інваріантів чистих МП за допомогою алгоритмів дослідження систем лінійних однорідних діофантових рівнянь (СЛОДР) та нерівностей (СЛОДН), зокрема їх використання для пошуку зрізаної множини розв'язків (Truncated Set of Solutions, TSS) записаного у вигляді СЛОДР рівняння стану мережі Петрі [9, 10]. Обчисливши S- та T-інваріанти для заданої МП, можна верифікувати такі її властивості як досяжність, обмеженість, повторюваність, консервативність, несуперечливість тощо [9, С. 199; 10, С. 157—170].

Доказом ефективності цього підходу є приклади його застосування до дослідження МП, які моделюють взаємодію абонентів у телефонній мережі з використанням різноманітних потенційно конфліктуючих сервісів [11, 12], організацію руху залізничного транспорту на залізничному вузлі взаємопов'язаних спеціалізованих станцій [13], функціонування обчислювального вузла Grid-системи [14]. Проте в цих роботах використовувалися чисті та компонентні МП, які поступаються потужністю та виразністю кольоровим МП. Водночас автоматизований аналіз КМП за допомогою методу інваріантів ускладнений через його функціональну, а не цілочисельну, як у класичних МП, природу [15]. В свою чергу, традиційні прямий та зворотній аналіз досяжності передбачають побудову дерев досяжності, кількість вершин яких вимірюється сотнями. Тому задача знаходження способу застосування до КМП методу знаходження S- та T-інваріантів є актуальною.

Саме вирішенню цієї задачі присвячена стаття [16], в якій підхід на основі S- та T-інваріантів було застосовано для дослідження властивостей двох КМП-моделей. Першою була КМП-модель, побудована на основі МП-моделі взаємодії абонентів у базовій телефонній мережі (Plain Old Telephone Service, POTS), запропонованої С. Л. Кривим та Л. Є. Матвєєвою [11, 12]. Другою була побудована автором КМП-модель взаємодії потоків у багатопоточних Java-застосуваннях за шаблоном «виробники-споживачі» з використанням комбінації методів wait()/notifyAll(). Було описано спосіб переведення КМП-моделі з базової форми з якісними, тобто семантично навантаженими, фішками, у форму з кількісними, тобто семантично ненавантаженими, фішками, характерними для класичних мереж Петрі. Аналіз двох форм моделі засвідчив збереження основних її властивостей.

Утім, стаття [16] розв'язує задачу лише частково, оскільки використання комбінації `wait()/notifyAll()` принципово усуває вірогідність виникнення дедлоків. Отже, залишився недослідженим цілий пласт властивостей МП- та КМП-моделей.

Запропонована стаття є логічним продовженням статті [16]. В ній побудовано КМП-модель взаємодії потоків у багатопоточних Java-застосуваннях за шаблоном «виробники-споживачі» з використанням комбінації методів `wait()/notify()`. Використання цієї комбінації може привести до дедлоку. Отже, її модель дасть можливість перевірити, як перехід від якісних до кількісних фішок впливає на дослідження моделі на активність. Таким чином, задача застосування до КМП методу знаходження S- та T-інваріантів буде розв'язана повністю.

Метою роботи є виявлення взаємозв'язків і взаємовідповідностей між МП- та КМП-моделями, що стануть основою створення засобів автоматизованого аналізу КМП та автоматизованого перетворення МП у КМП. Для досягнення цієї мети автором побудовано і досліджено КМП-модель взаємодії потоків з використанням комбінації методів `wait()/notify()` із якісними фішками. Далі на її основі побудовано і досліджено модель із кількісними фішками. Доведено, що у випадку цих моделей перехід з однієї форми до іншої не призводить до зміни властивостей мереж та спотворення результатів аналізу.

КМП із якісними фішками

Побудована нами КМП-модель взаємодії потоків в багатопоточних застосуваннях за шаблоном «виробники-споживачі» з використанням комбінації методів `wait()/notify()` із якісними фішками складається з 6 місць та 10 переходів (рис. 1). Місце *Threads* містить активні потоки, представлені фішками типу TYPE, для якого визначено два можливі значення: PROD («потік-виробник») і CONS («потік-споживач»). Потоки-виробники збільшують на 1 значення спільної змінної типу INT (представлена місцем *Shared Variable*), якщо воно рівне 0, а потоки-споживачі зчитують його, якщо воно відмінне від 0, і зменшують його на 1. Необхідний для коректної роботи системи взаємовиключний доступ до спільної змінної регулюється монітором. Він складається з множини претендентів (місце *Entry Set*), зони власника (місце *Owner Zone*) та множини очікуючих (місце *Wait Set*). При зверненні до спільної змінної потік потрапляє до множини претендентів, де знаходиться доти, доки монітор не впустить його у зону власника. Потрапивши у зону власника, потік або виконує свою задачу, якщо для цього є умови, або відправляється у множину очікуючих, де чекає на свій наступний шанс. Наступний шанс випадає тоді, коли потік, що успішно виконав свою задачу, залишає монітор. При цьому викликається метод `notify()`, який пробуджує один обраний випадковим чином очікуючий потік (якщо хоча б один такий є). Детальніше про функціонування монітора у віртуальній машині Java див. [17].

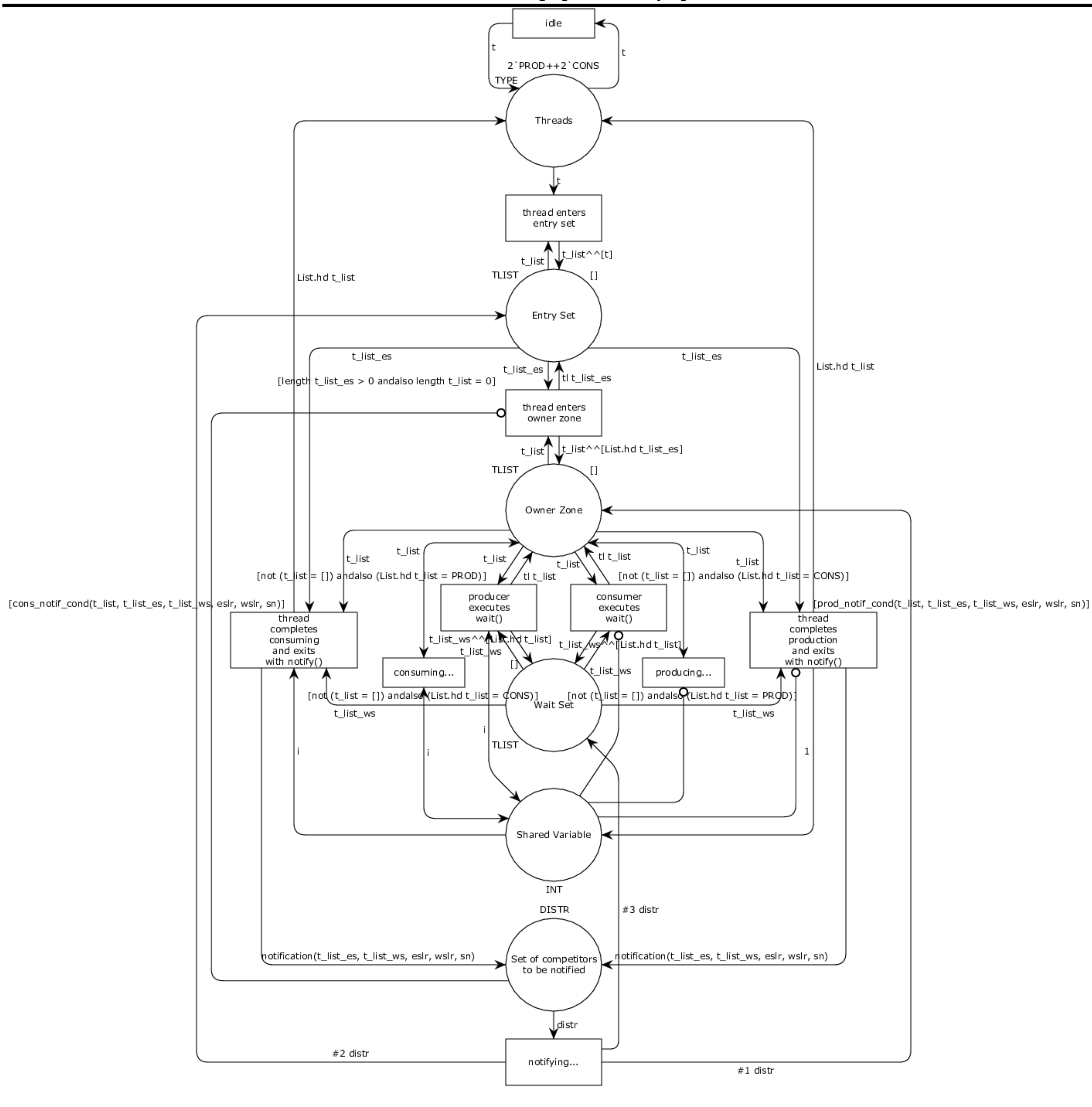

Рис. 1. КМП-модель із якісними фішками

Місця *Entry Set, Owner Zone* та *Wait Set* мають тип TLIST, тобто список об'єктів типу TYPE. В початковому стані всі ці списки порожні, а в подальшому до них додаються та прибираються елементи, що позначають окремі потоки. Розглянемо випадок, коли їх у системі чотири, при чому два з них є виробниками, а інші два – споживачами. Початкове маркування $\mathbf{M_0}$ = (2'PROD + 2'CONS, 1'[], 1'[], 1'[], -, -).

Ця модель складніша за попередню через потребу забезпечити випадковий вибір потоку для пробудження і переходу у зону власника з-поміж тих, які перебувають у множині претендентів та множині очікуючих. При роботі зі списковими типами даних це означає потребу генерування випадкових чисел – індексів елементів списків претендентів та очікуючих, з-поміж яких обирається один для переміщення у зону власника. Але вбудовані у CPN Tools функції генерування випадкових чисел, такі як `discrete()` та `uniform()`, при переході у простір станів генерують не набір різних станів, кожний з яких відповідає одному з імовірних варіантів, а тільки один стан, який відповідає єдиному обраному випадковим чином варіанту. Тому для здійснення повного перебору можливих варіантів було введено проміжкові типи: RANGE_L = int with 0..3 (тобто цілі числа від 0 до 3 включно для перебору індексів елементів списку, що може містити максимум три елементи одночасно) та RANGE_N = int with 1..2 (тобто цілі числа від 1 до 2 включно для перебору варіантів вибору між списком претендентів та списком очікуючих).

Дія методу `notify()` моделюється шляхом створення трьох списків. Перший з них складається з потоку, який до цього перебував у множині претендентів або очікуючих, але на наступному кроці прокинеться і перейде у зону власника, другий — з потоків, які були у множині претендентів і там і залишаться, третій — з потоків, які були у множині очікуючих і там залишаться. Ці списки зводяться в місці *Set of competitors to be notified* в одну фішку типу DISTR = TLIST * TLIST * TLIST, після чого розподіляються по місцях *Owner Zone*, *Entry Set* та *Wait Set* відповідно.

Аналіз КМП із якісними фішками

Аналіз графа досяжності даної КМП-моделі, побудованого засобами CPN Tools, дозволяє дійти таких висновків щодо її властивостей:

- обмеженість (граф досяжності включає в себе 210 станів, що є скінченною величиною, а отже, досліджувана КМП є обмеженою);
- повторюваність (існує початковий стан, починаючи з якого, можна побудувати таку послідовність переходів між станами σ, що всі переходи зустрічатимуться у σ нескінченну кількість разів);
- несуперечливість (початковий стан є досяжним із самого себе через таку послідовність переходів між станами σ, що всі переходи входять до σ принаймні один раз);
- взаємовиключність (в місці *Owner Zone* не може перебувати більше одного потоку одночасно);
- живучість (мертві переходи відсутні, мертві маркування: $\mathbf{M}_{195}$ = (-, 1’[], 1’[], 1’[CONS,CONS,PROD,PROD], 1’1, -) та $\mathbf{M}_{209}$ = (-, 1’[], 1’[], 1’[PROD,PROD,CONS,CONS], -, -)).

Результати дослідження підтверджують, що використання комбінації методів `wait()/notify()` у багатопоточних Java-застосуваннях, які функціонують згідно шаблону «виробники-споживачі», є небезпечним через можливість виникнення тупикової ситуації.

Перехід до КМП із кількісними фішками

Для застосування алгоритму визначення мінімальної породжуючої множини S- та T-інваріантів необхідно переробити побудовану нами КМП із якісними фішками на КМП із кількісними фішками типу UNIT та без інгібіторних дуг. Для цього треба замінити якісні місця КМП (*Threads, Entry Set, Owner Zone, Wait Set*) наборами місць, кожне з яких відповідатиме одному з допустимих значень відповідного якісного типу TYPE. Замість перших трьох місць матимемо шість (*Producers/Consumers, Producers/Consumers In Entry Set, Producer/Consumer In Owner Zone*). Місце *Wait Set* треба розбити на шість місць: *No Producers/Consumers In Wait Set, One Producer/Consumer In Wait Set, Two Producers/Consumers In Wait Set.* Також нам знадобиться місце *Shared Variable Is Null,* яке замінить інгібіторні дуги, що виходили з місця *Shared Variable.*

Для моделювання всіх можливих варіантів спрацювання методу `notify()` знадобляться переходи *prod/cons_wakes_none, prod/cons_wakes_cons/prod_none_left, prod/cons_wakes_cons/prod_one_left, prod_wakes_prod, cons_wakes_cons.* Переходи *prod/cons_wakes_prod/cons_none_left* та *prod/cons_wakes_prod/cons_one_left* не потрібні, оскільки виробників та споживачів тільки двоє, і ці переходи будуть мертвими. Утім, в моделях з більшою кількістю потоків ці переходи будуть потрібні.

Одержана нами в результаті перетворення КМП, яка складається з 17 місць та 22 переходів, наведена на рис. 3. Початкове маркування $\mathbf{M}_0$ = (2, 2, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1).

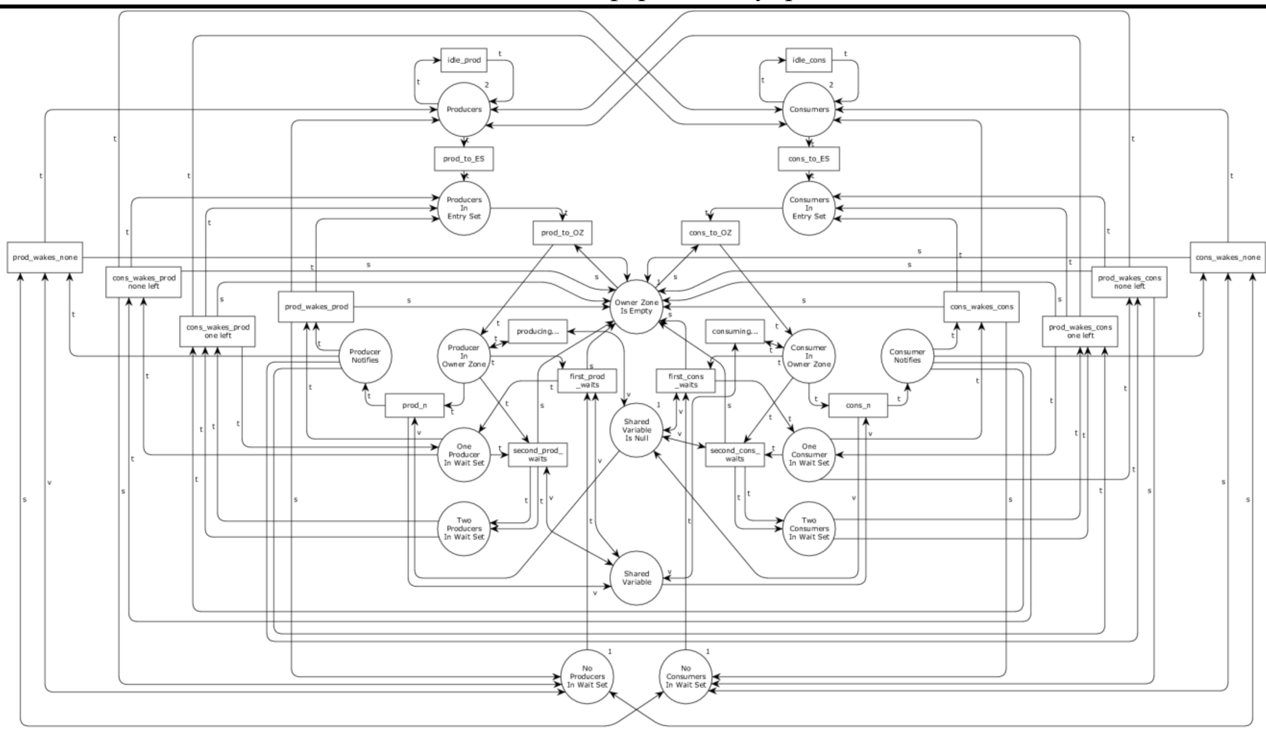

Рис. 3. КМП-модель із кількісними фішками

Аналіз КМП із кількісними фішками

Аналіз графа досяжності даної КМП-моделі, побудованого засобами CPN Tools, дозволяє дійти таких висновків щодо її властивостей:

- обмеженість (граф досяжності включає в себе 176 станів, що є скінченною величиною, а отже, досліджувана КМП є обмеженою);
- повторюваність (див. вище);
- несуперечливість (див. вище);
- взаємовиключність (в парі місць *Producer In Owner Zone / Consumer In Owner Zone* може перебувати не більше однієї фішки одночасно, і якщо вона є, місце *Owner Zone Is Empty* обов’язково порожнє);
- живучість (мертві переходи відсутні, мертві маркування: $\mathbf{M}_{167}$ = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 2, 2, 0, 0, 0) та $\mathbf{M}_{176}$ = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 2, 1, 0, 0)).

Отже, при переході від КМП-моделі із якісними фішками до КМП-моделі із кількісними фішками властивості початкової моделі збереглися.

Матриця інцидентності **A** розмірності 18×17 (переходи *idle_prod, idle_cons, producing…* та *consuming…*, в яких вхідна позиція співпадає із вихідною, не враховуються) має такий вигляд:

$$A = \begin{pmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Для перевірки даної КМП на наявність дедлоків побудуємо систему лінійних однорідних діофантових нерівностей над множиною {0, 1}, еквівалентну системі логічних рівнянь, яка описує властивість дедлоків. А саме: якщо довільний перехід має вихідне місце, яке належить дедлоку Q, то дедлоку Q має належати і його вхідне місце [10, С. 166].

Для даної КМП матимемо такі множини вхідних та вихідних місць переходів (номери переходів і місць відповідають номерам відповідно стовпчиків і рядків матриці інцидентності):

•t1 = {P1};	•t2 = {P2};	•t3 = {P3, P5};
t1• = {P3};	t2• = {P4};	t3• = {P7};
•t4 = {P4, P5};	•t5 = {P6};	•t6 = {P8};
t4• = {P8};	t5• = {P1, P5};	t6• = {P2, P5};
•t7 = {P9, P11};	•t8 = {P6, P12};	•t9 = {P6, P11};
t7• = {P2, P3, P5, P16};	t8• = {P1, P4, P5, P17};	t9• = {P1, P3, P5, P16};
•t10 = {P9, P12};	•t11 = {P9, P13};	•t12 = {P6, P14};
t10• = {P2, P4, P5, P17};	t11• = {P2, P3, P5, P11};	t12• = {P1, P4, P5, P12};
•t13 = {P7, P16};	•t14 = {P8, P17};	•t15 = {P7, P10};
t13• = {P5, P11};	t14• = {P5, P12};	t15• = {P6, P15};
•t16 = {P8, P15};	•t17 = {P7, P11};	•t18 = {P8, P12};
t16• = {P9, P10};	t17• = {P5, P13};	t18• = {P5, P14}.

Звідси маємо такі логічні залежності для пошуку дедлоків:

$P1 \in Q \to P6 \wedge (P6 \vee P11) \wedge (P6 \vee P12) \wedge (P6 \vee P14) = P6 \in Q$;
$P2 \in Q \to P8 \wedge (P9 \vee P11) \wedge (P9 \vee P12) \wedge (P9 \vee P13) = (P8 \wedge P9) \vee (P8 \wedge P11 \wedge P12 \wedge P13) \in Q$;
$P3 \in Q \to P1 \wedge (P6 \vee P11) \wedge (P9 \vee P11) \wedge (P9 \vee P13) = (P1 \wedge P11 \wedge P9) \vee (P1 \wedge P6 \wedge P9) \vee (P1 \wedge P11 \wedge P13) \in Q$;
$P4 \in Q \to P2 \wedge (P6 \vee P12) \wedge (P9 \vee P12) \wedge (P6 \vee P14) = (P2 \wedge P6 \wedge P12) \vee (P2 \wedge P6 \wedge P9) \vee (P2 \wedge P12 \wedge P14) \in Q$;
$P5 \in Q \to P6 \wedge P8 \wedge (P9 \vee P11) \wedge (P6 \vee P12) \wedge (P6 \vee P11) \wedge (P9 \vee P12) \wedge (P9 \vee P13) \wedge (P6 \vee P14) \wedge (P7 \vee P16) \wedge (P8 \vee P17) \wedge (P7 \vee P11) \wedge (P8 \vee P12) = (P6 \wedge P8 \wedge P7 \wedge P9) \vee (P11 \wedge P9 \wedge P16) \vee (P7 \wedge P11 \wedge P12 \wedge P13) \vee (P11 \wedge P16 \wedge P12 \wedge P13) \in Q$;

$P6 \in Q \to P7 \vee P10 \in Q$;
$P7 \in Q \to P3 \vee P5 \in Q$;
$P8 \in Q \to P4 \vee P5 \in Q$;
$P9 \in Q \to P8 \vee P15 \in Q$;
$P10 \in Q \to P8 \vee P15 \in Q$;
$P11 \in Q \to (P9 \vee P13) \wedge (P7 \vee P16) \in Q$;
$P12 \in Q \to (P9 \vee P13) \wedge (P8 \vee P17) \in Q$;
$P13 \in Q \to P7 \vee P11 \in Q$;
$P14 \in Q \to P8 \vee P12 \in Q$;
$P15 \in Q \to P7 \vee P10 \in Q$;
$P16 \in Q \to (P9 \vee P11) \wedge (P6 \vee P11) \in Q$;
$P17 \in Q \to (P6 \vee P12) \wedge (P9 \vee P12) \in Q$.

Ці умови можна переписати у вигляді такої системи логічних формул:

$\neg P1 \vee P6$;
$\neg P2 \vee (P8 \wedge (P9 \vee P11) \wedge (P9 \vee P12) \wedge (P9 \vee P13))$;
$\neg P3 \vee (P1 \wedge (P6 \vee P11) \wedge (P9 \vee P11) \wedge (P9 \vee P13))$;
$\neg P4 \vee (P2 \wedge (P6 \vee P12) \wedge (P9 \vee P12) \wedge (P6 \vee P14)) \in Q$;
$\neg P5 \vee (P6 \wedge P8 \wedge (P9 \vee P11) \wedge (P6 \vee P12) \wedge (P6 \vee P11) \wedge (P9 \vee P12) \wedge (P9 \vee P13) \wedge (P6 \vee P14) \wedge (P7 \vee P16) \wedge (P8 \vee P17) \wedge (P7 \vee P11) \wedge (P8 \vee P12))$;
$\neg P6 \vee P7 \vee P10$;
$\neg P7 \vee P3 \vee P5$;

$\neg P8 \vee P4 \vee P5$;
$\neg P9 \vee P8 \vee P15$;
$\neg P10 \vee P8 \vee P15$;
$\neg P11 \vee ((P9 \vee P13) \wedge (P7 \vee P16))$;
$\neg P12 \vee ((P9 \vee P13) \wedge (P8 \vee P17))$;
$\neg P13 \vee P7 \vee P11$;
$\neg P14 \vee P8 \vee P12$;
$\neg P15 \vee P7 \vee P10$;
$\neg P16 \vee ((P9 \vee P11) \wedge (P6 \vee P11))$;
$\neg P17 \vee ((P6 \vee P12) \wedge (P9 \vee P12))$.

Ці формули можна записати у вигляді системи лінійних однорідних діофантових нерівностей (далі СЛОДН) з коефіцієнтами із множини {-1, 0, 1}. Через велику кількість нерівностей в цій системі (41) наведемо тільки перші 9 із них (для ¬P1, ¬P2 та ¬P3):

$$A * x = \left\{ \begin{array}{lllllllllllllllll l} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \geq 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \geq 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \geq 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \geq 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \geq 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \geq 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \geq 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \geq 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \geq 0 \\ & & & & & & & & \dots & & & & & & & & & \end{array} \right.$$

Розв'язавши цю систему (наприклад, за алгоритмом Аджілі-Контежан [18]), отримаємо множину із 3638 векторів, до якої входить, зокрема, вектор v_{max} = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1), який означає, що всі місця даної КМП складають дедлок. Найбільше нас цікавлять мінімальні дедлоки, тобто такі, до яких не входять інші дедлоки. Таких буде 10:

- v_1 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0),
- v_2 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0),
- v_3 = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),
- v_4 = (1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0),
- v_5 = (0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0),
- v_6 = (1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0),
- v_7 = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),
- v_8 = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0),
- v_9 = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0),
- v_{10} = (1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0).

Аналіз інваріантів для даної КМП дозволяє дійти таких висновків щодо її властивостей:

- обмеженість. Множина S-інваріантів складається з таких векторів:
  - s_1 = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0);
  - s_2 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 1, 0, 0, 2, 0);
  - s_3 = (1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0);
  - s_4 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 1, 0, 0, 2);
  - s_5 = (0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0);
  - s_6 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0).

Усі місця покриваються ненульовими координатами з множини S-інваріантів, а отже, дана КМП обмежена. Позбувшись інгібіторних дуг, ми позбулися неоднозначності у вигляді нульових стовпців, які вказували на потенційну наявність необмежених місць.

- Повторюваність. Множина T-інваріантів (неочищена від векторів, які є лінійними комбінаціями інших елементів множини) налічує 1 547 052 векторів, тож наводити її ми не будемо. Утім, ненульові координати векторів з цієї множини покривають всі переходи КМП, тож вона є повторюваною.
- Несуперечливість. Початкове маркування $\mathbf{M_0}$ є досяжним із самого себе через таку послідовність переходів σ, що кожен перехід входить до σ принаймні один раз.
- Взаємовиключність. Для перевірки на взаємовиключність слід переконатись, що 1) зона власника не може бути одночасно зайнята і вільна, та 2) в зоні власника може перебувати тільки один потік одночасно. Для доведення істинності твердження 1 треба показати недосяжність таких маркувань:
  - M_{11} = (2, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1),
  - M_{12} = (1, 2, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1),
  - M_{13} = (2, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1)
  - та інших з фішкою у позиції *Owner Zone Is Free* і однією фішкою в одній з позицій *Producer/Consumer In Owner Zone*.

Для доведення істинності твердження 2 треба показати недосяжність таких маркувань:

- M_{21} = (0, 2, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1),
- M_{22} = (2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1),
- M_{23} = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1)
- та інших з однією або більше фішками одразу в обох позиціях *Producer/Consumer In Owner Zone*.

Неважко переконатися, що при $\mathbf{M_0}$ = (2, 2, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1) жодне невзаємовиключне маркування, зокрема жодне із наведених вище в якості прикладу, не є досяжним, оскільки їх добуток на щонайменше один із S-інваріантів не дорівнює добутку $\mathbf{M_0}$ на цей самий S-інваріант.

Отже, заміна місць, які можуть містити типізовані фішки, такою кількістю місць, що можуть містити безтипові фішки, яка відповідає кількості можливих значень для даного типу даних, та заміна інгібіторних дуг додатковими місцями не вплинули на основні властивості моделі, зокрема на наявність дедлоків. Це дає підстави припустити, що описані перетворення вихідної КМП-моделі із якісними фішками на КМП-модель із кількісними фішками є еквівалентними.

Висновки

В статті продовжено роботу з вироблення принципів застосування S- та T-інваріантів до аналізу КМП з метою поширення існуючих методів аналізу МП на КМП та розробки специфічних методів аналізу КМП на основі методів аналізу МП. Для цього побудовано та проаналізовано КМП-моделі взаємодії потоків з використанням комбінації методів `wait()/notify()` із якісними та кількісними фішками. Показано, що побудовані моделі є еквівалентними з точки зору властивостей активності, живучості та взаємовиключності. Це дає підстави стверджувати про можливість переходу з однієї форми до іншої без зміни властивостей, а відтак і без спотворення результатів аналізу моделі. Це дає підстави припустити, що перетворення КМП із якісними фішками на КМП із кількісними фішками є еквівалентними, оскільки вони зберігають властивості початкових КМП.

У підсумку КМП-моделі із якісними та кількісними фішками, побудовані нами в роботі [16] та цій статті, та результати аналізу за допомогою алгоритму визначення мінімальної породжуючої множини S- та T-інваріантів, розв'язують задачу знаходження способу використання цього алгоритму до аналізу властивостей КМП. В якості об'єктів дослідження було обрано не умовні та якимось специфічним чином налаштовані МП, а реальні МП- та КМП-моделі, побудовані в рамках розв'язання практично значущих прикладних задач, а отже, є підстави стверджувати, що описані у статті підходи є універсальними. Утім, остаточне доведення цього твердження вимагає додаткових досліджень.

Також отримані результати показують, що КМП із кількісними фішками подібні до класичних МП. Встановлення цієї подібності є важливим кроком до створення засобів автоматизованого аналізу КМП та автоматизованого перетворення МП у КМП — потужнішу за МП мову, а тому перспективнішу з точки зору проведення подальших поглиблених досліджень.

Логічним подальшим розвитком запропонованої роботи вбачається строге доведення еквівалентності КМП-моделей із якісними та кількісними фішками, а відтак і універсальності запропонованих підходів. Це стане основою для розробки алгоритму та програмних засобів для автоматизованого перетворення КМП із якісними фішками на КМП із кількісними фішками. Також вбачається доцільним поширення описаного у статті методу на інші види мереж Петрі, зокрема на часові, стохастичні та структурні. Також перспективним видається застосування до МП та КМП із кількісними фішками засобів аналітичної комбінаторики та побудова їхніх узагальнених породжуючих функцій [19-21].

Список посилань

1. Jensen K. Coloured Petri Nets. Modelling and Validation of Concurrent Systems / K. Jensen, L. M. Kristensen – Berlin: Springer, 2009. – 384 p.
2. van der Aalst W. M. P. Modeling Business Processes – A Petri Net-Oriented Approach / W. M. P. van der Aalst, C. Stahl. – The MIT Press, 2011. – 400 p.
3. Методи та новітні підходи до проектування, управління і застосування високопродуктивних IT-інфраструктур / Бойко Ю. В., Волохов В. М., Глибовець М. М. та ін. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2015. – 376 с.
4. Глибовець М. М. Моделі та методи створення і супроводу високопродуктивного розподіленого навчального середовища: Автореф. дис. на здобуття наук. ступеня д-ра фіз.-мат. наук : спец. 01.05.03 «Математичне та програмне забезпечення обчислювальних машин і систем» / М. М. Глибовець. – К., 2006. – 36 с.
5. Гломозда Д. К. Моделювання роботи колаборативного середовища за допомогою кольорових мереж Петрі / Д. К. Гломозда // Наукові записки. Т. 163: Комп'ютерні науки / Національний університет «Києво-Могилянська Академія». – К., 2014. – С. 77–85.
6. Godon A. PM Editeur 3.1e. / A. Godon, F. Bousseau. – LisaDev, 1992—96. – Режим доступу: http://www.cremona.polimi.it/dispense/Automazione%20Industriale/pm_us.zip

7. Svadova M. Matlab Toolbox for Petri Nets / M. Svadova, Z. Hanzalek // INOVACE 2000, December 5—9, 2000.: proc. – Praha, 2000. – P. 15.
8. Jensen K. Coloured Petri Nets and CPN Tools for Modelling and Validation of Concurrent Systems / K. Jensen, L. M. Kristensen, L. Wells // International Journal on Software Tools for Technology Transfer. – 2007. – Vol. 9. – No. 3-4. – P. 213–254.
9. Крывый С. Л. О вычислении минимального множества инвариантов сети Петри / С. Л. Крывый // Искусственный интеллект. – 2001. – №3. – С. 199–206.
10. Кривий С. Л. Лінійні діофантові обмеження та їх застосування / С. Л. Кривий. – Чернівці – Київ: Букрек, 2015. – 224 с.
11. Крывый С. Л. О применении сетей Петри к решению некоторых задач телекоммуникации / Крывый С. Л., Матвеева Л. Е. // Искусственный интеллект. – 2002. – №3. – С. 590–598.
12. Матвеева Л. Е. Автоматическая система анализа и верификации телекоммуникационной системы, описанной на языке MSC, с помощью формализма сетей Петри / Л. Е. Матвеева // Проблеми програмування. – 2004. – № 2-3. – С. 108-117.
13. Лукьянова Е. А. Исследование однотипных структурных элементов CN-сети в процессе компонентного моделирования и анализа сложной системы с параллелизмом / Е. А. Лукьянова, А. В. Дереза // Кибернетика и системный анализ. – 2012. – № 6. – С. 20—29.
14. Шелестов А. Ю. Моделирование Grid-узла на основе сетей Петри / А. Ю. Шелестов // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2009. – №3. – С. 52-65.
15. Jensen K. Coloured Petri Nets and the Invariant Method / Kurt Jensen // Theoretical Computer Science. – 1981. – Vol. 14. – P. 317–336.
16. Гломозда Д. К. Застосування методу інваріантів до аналізу кольорових мереж Петрі / Д. К. Гломозда // Наукові записки. Т. 177: Комп'ютерні науки / Національний університет «Києво-Могилянська Академія». – К., 2015. – С. 44–52.
17. Venners B. Thread Synchronization [Electronic resource] / Bill Venners – Mode of access: https://www.artima.com/insidejvm/ed2/threadsynch.html. – Title from the screen.
18. Ajili F. Avoiding Slack Variables in the Solving of Linear Diophantine Equations and Inequations / Ajili F., Contejan E. // Theoretical Comp. Science. – 1997. – V. 173. – P. 183–208.
19. Flajolet P. Analytic Combinatorics / Philippe Flajolet, Robert Sedgewick. — Cambridge: Cambridge University Press, 2009. – 810 p.
20. Ландо С. К. Лекции о производящих функциях / Сергей Константинович Ландо. — М.: МЦНМО, 2007. – 144 с.
21. Ландо С. К. Введение в дискретную математику / Сергей Константинович Ландо. — 2012. – Режим доступа: http://vyshka.math.ru/pspdf/1213/discr/LandoBook.pdf.