

## МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ БІОЛОГІЧНОЇ ОЧИСТКИ СТИЧНИХ ВОД

*За допомогою диференціального рівняння поширення забруднень в рухомому середовищі побудована математична модель біологічної очистки стічних вод у біореакторі.*

Біореактор є прямокутною очисною спорудою (канал чи басейн) у вигляді прямокутної призми. На вхід у біореактор поступають стічні води з різними інгредієнтами забруднюючих речовин. Кожен з інгредієнтів, перебуваючи в біореакторі, трансформується (перетворюється) в нешкідливі або малешкідливі речовини. Найтоксичніші органічні речовини за допомогою мікроорганізмів трансформуються в неорганічні речовини, які або осідають на дні реактора, або засвоюються фітопланктоном та іншими водними організмами. Таким чином, відбувається біологічне очищення стічних вод. Швидкість такого очищення залежить як від біомаси мікроорганізмів, так і від концентрації забруднень, які впливають на біомасу мікроорганізмів. Якщо в біореакторі процес стабілізувався, то концентрація забруднень у кожній точці біореактора не змінюватиметься протягом всього часу спостереження. Проте вздовж реактора в напрямку руху стічних вод концентрація забруднень зменшується і на виході з біореактора вона стає найменшою. Ясно, що чим більше часу стічні води перебуватимуть у біореакторі, тим більше вони очистяться. Час перебування стічних вод у біореакторі залежить від швидкості, з якою вони в нього поступають. Отже, чим більша швидкість течії в біореакторі, тим менш очищена вода буде на виході з біореактора. В зв'язку з цим виникає задача визначення такої швидкості стічних вод у біореакторі, за якої концентрація забруднень на виході не перевищуватиме заданої гранично допустимої величини. Для розв'язання такої задачі доцільно застосувати метод математичного моделювання.

Скористаємось загальним рівнянням масопереносу домішок в рухомому розчині з урахуванням кінетики реакції перетворення (само-

очищення) забруднюючих вод речовин, яке записується так:

$$D \frac{\delta^2 c}{\delta x^2} - V_x \frac{\delta c}{\delta x} - \gamma(x, t, T, c) c = \frac{\delta c}{\delta t}, \quad (1)$$

де  $c(x, t)$  — концентрація забруднень,  $D$  — коефіцієнт молекулярної дифузії,  $V_x$  — швидкість руху розчину,  $\gamma(x, t, T, c)$  — функція, що описує кінетику біологічного самоочищення,  $t$  — час у добі.

У нашому випадку, враховуючи досить малий вплив молекулярних процесів на очищення стічних вод та їх стаціонарний характер, для моделювання біологічного очищення стічних вод у реакторі маємо таке рівняння:

$$V_x \frac{dc}{dx} = \gamma(x, t, T, c) c. \quad (2)$$

Коефіцієнт очищення при сталій температурі будемо визначати такою рівністю:

$$\gamma(x, t) = \gamma_{\max} + (\gamma_{\min} - \gamma_{\max}) e^{-t/\mu}, \quad (3)$$

де постійні  $\gamma_{\min}$ ,  $\gamma_{\max}$  і  $\mu$  визначаються при верифікації (калібруванні) моделі на основі даних натурних спостережень.

Коефіцієнт швидкості біологічного очищення стічних вод у може мати різну структуру, але основною його властивістю є те, що він повинен задовольняти таким двом умовам:

$$\gamma(0) = \gamma_{\min} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma = \gamma_{\max} \quad (4)$$

Ця властивість показує, що швидкість очищення стічних вод не може збільшуватись необмежено. Тому коефіцієнт швидкості очищення у має асимптотичний характер обмеження.

Розв'язок диференціального рівняння шукатимемо при додатковій (початковій) умові  $c(0) = c_{\text{ст}}$ , де  $c_{\text{ст}}$  — концентрація стічних вод, що посту-

пають в реактор. Отже, математична модель біологічного очищення стічних вод описується такою крайовою задачею:

$$V_x \frac{dc}{dx} = - [\gamma_{\max} + (\gamma_{\min} - \gamma_{\max}) e^{-t/\mu}] c, \quad (5)$$

$$c|_{x=0} = c(0) = c_{\text{стр.}}$$

Враховуючи, що  $V_x = \frac{dx}{dt}$ , крайову задачу(5)

перепишемо в такому вигляді:

$$\frac{dc}{dt} = - [\gamma_{\max} + (\gamma_{\min} - \gamma_{\max}) e^{-t/\mu}] c, \quad c(0) = c_{\text{стр.}} \quad (6)$$

Як було вже сказано, для математичної моделі (2) трофічну функцію  $\gamma(x, t, c, B)$ , що описує величину швидкості біологічного самоочищення, можна представити різними функціями, які задовольняють умові (4). Крім уже наведеної вище функції (3), такій умові задовольняє функція, що визначається рівнянням Міхаеліса-Ментен у такій формі:

$$\gamma(t) = \frac{\gamma_{\max} t}{\gamma_m + t}, \quad (7)$$

де  $\gamma_{\max}$  і  $\gamma_m$  — сталі верифікації, причому стала Міхаеліса  $\gamma_m$  дорівнює такому значенню часу, за якого швидкість протікання реакції (споживання субстрату) дорівнює половині максимальної ( $\gamma = 1/2 \gamma_{\max}$ ).

Формулу Міхаеліса-Ментен можна узагальнити і записати як функцію часу, концентрації та біомаси мікроорганізмів, а саме:

$$\gamma(t, c, B) = \frac{\gamma_{\max}(t+c+B)}{\gamma_m + (t+c+B)}. \quad (8)$$

Аналогічно можна узагальнити трофічну функцію (3) і записати її у вигляді

$$\gamma(t, c, B) = \gamma_{\max} + (\gamma_{\min} - \gamma_{\max}) e^{-(t+c+B)/\mu} \quad (9)$$

Для деяких організмів трофічну функцію можна визначити як розв'язок логістичного рівняння, тобто:

$$\gamma(t, c, B) = \frac{\gamma_{\min} \gamma_{\max}}{\gamma_{\min} + (\gamma_{\max} - \gamma_{\min}) e^{-rt}}, \quad (10)$$

або в більш загальному вигляді:

$$\gamma(t, c, B) = \frac{\gamma_{\min} \gamma_{\max}}{\gamma_{\min} + (\gamma_{\max} - \gamma_{\min}) e^{-r(t+c+B)}}. \quad (H)$$

Розв'язавши крайову задачу (6), знайдемо функцію, що описує (моделює) динаміку забруднень (зміну їхньої концентрації):

$$c(t) = c_{\text{стр.}} \exp [\mu (\gamma_{\min} - \gamma_{\max}) (e^{-t/\mu} - 1) - \gamma_{\max} t],$$

$$t = \frac{x}{V_x}. \quad (12)$$

За допомогою наведених моделей було зроблено розрахунки основних параметрів біореактора, що очищає стічні води молокозаводу.

1. Лаврик В. И., Никифорович Н. А. Математическое моделирование в гидроэкологических процессах.— Киев, Фитосоцицентр, 1998.— 287 с.

2. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика.— М.: Физмат-издат, 1959.— 699 с.

3. Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике.— М.: Наука, 1967.— 491 с.

Lavryk V. I.

## MATHEMATICAL MODELS OF BIOLOGICAL PURIFICATION OF SEWAGE

With the aid of differential equation of dissemination pollution in motive medium it was constructed mathematical models of biological purification of sewage in bioreactor.