УДК 681.3.06

*Кравченко І. В.*

# ЛІНІЙНІ РОЗКЛАДИ ФІБОНАЧЧІ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ

*Розглядаються властивості часткових сум елементів рекурентних послідовностей, які є простим узагальненням чисел Фібоначчі.*

При побудові й аналізі алгоритмів числа Фібоначчі та система числення Фібоначчі знаходять широке застосування. Досить згадати рішення десятої проблеми Гільберта [1], аналіз алгоритмів сортування [2], машини додавання [3], лінійні форми Фібоначчі [4] та інше. Багатство різноманітних співвідношень, яким задовольняють числа Фібоначчі, дозволяють для багатьох математичних проблем знаходити ефективні та прості рішення, особливо в області цілочисельної арифметики. В даній роботі досліджуються закономірності часткових сум рекурентних послідовностей по елементах, які визначаються Фібоначчієвими представленнями натуральних чисел.

**Позначення та означення.**

Через **U(a, b)** позначимо множину чисел, що є членами рекурентної послідовності з породжуючими числами a та b.

Тобто **U(a, b)**$=\{u_i(a, b)\ u_0(a, b)=a,\ u_1(a, b)=b,\ u_{i+2}(a, b)= u_{i+1}(a, b)+ u_i(a, b),\ i\in \mathbf{Z}\}$. (*)

При a=0, b=1 отримаємо класичну послідовність **F** чисел Фібоначчі, а при a=2, b=1 — послідовність **V** чисел Люка. Елементи цих послідовностей будемо позначати відповідно $F_i$ та $V_i$.

Враховуючи природу породження **U(a, b),** для таких послідовностей справедливі аналоги значної кількості закономірностей **F** та **V.** Нам необхідні будуть такі:

$$u_i(a, b) = u_{i-j}(a, b) \cdot F_{j+1} + u_{i-j-1}(a, b) \cdot F_j; \qquad (1)$$

$$u_i(a, b) = u_{i-j}(a, b) \cdot F_{j+2} - u_{i-j-2}(a, b) \cdot F_j; \qquad (2)$$

$$u_i(a, b+c) = u_i(a, b) + c\cdot F_i; \qquad (3)$$

$$u_i(a, b) + (-1)^i u_{-i}(a, b) \cdot F_{k-1} = a\cdot Vi. \qquad (4)$$

Будь-яке натуральне число p єдиним чином розкладається на суму чисел Фібоначчі

$p= F_{i1}+ F_{i2}+ j+ F_{i\,t}$, $i_1>>i_2>>j>>i_t>>0$, де $t>0$ та $l>>l'$, якщо $l-l'\geq 2$.

Позначимо через I(**a**) множину індексів в представленні Фібоначчі числа **a**, тобто I(**a**)$=\{i_1, i_2, j, i_t\}$. Через I(**a**)+k будемо позначати множину $\{i_1+k, i_2+k, j, i_t+k\}$.

*Означення.* Лінійним розкладом Фібоначчі натурального числа **a** будемо називати послідовність **U(a, –a₁),** де $\mathbf{a}_1=\sum_{i\in I(a)-1}F_i$.

Тобто, число $\mathbf{a_1}$ отримується "зсувом" бітового слова представлення Фібоначчі числа **a** на один розряд. Порівнюючи із стандартною двійковою системою, можемо відмітити, що послідовність $\mathbf{U(a, -a_1)}$ є "аналогом" результатів ділення на 2 у двійковій системі.

**Властивості часткових сум.**

**Теорема 1**. Для лінійного розкладу Фібоначчі натурального числа **a** справедливою є формула

$$\sum_{i\in I(a)}u_i(a,-a_1)=0. \qquad (5)$$

*Доведення.* Враховуючи, що для елементів послідовності (*) виконується (1), то

$u_i(a, -a_1)=a_0\cdot F_{i-1}-a_1\cdot F_i$.

Взявши суму елементів за індексами множини I(**a**), отримаємо

$\sum_{i\in I(a)}u_i(a,-a_1)=a_0\cdot F_{i1-1}-a_1\cdot F_{i1}+a_0\cdot F_{i2-1}-a_1\cdot F_{i2}+\ldots+a_0\cdot F_{it-1}+a_1\cdot F_{it}= a_0\cdot (F_{i1-1}+ F_{i2-1}+\ldots+F_{it-1}) - a_1\cdot (F_{i1}+ F_{i2}+\ldots+ F_{it})=a_0\cdot a_1-a_1\cdot a_0=0$. ■

**Теорема 2**. Для будь-якого цілого числа **b** справджується формула

$$\sum_{i\in i(a)}u_i(a,-a_1+b)=a\cdot b. \qquad (6)$$

*Доведення.* На підставі (3) $u_i(a,- a_1+b)=u_i(a, -a_1)+b\cdot F_i$.

Тому $\sum_{i\in I(a)}u_i(a,-a_1+b)= \sum_{i\in I(a)} u_i(a, -a_1)+\sum_{i\in I(a)}b\cdot F_i=0+b\cdot\sum_{i\in I(a)}F_i=b\cdot a$. ■

**Теорема 3**. Справедливою є формула:

$$\sum_{i\in I(a)+k}u_i(a, -a_1) = F_k \cdot (a^2- a_1 \cdot (a+a_1)). \qquad (7)$$

*Доведення.* Вірність рівності

$\sum_{i\in I(a)+k}u_i(a, -a_1) = F_k \cdot r$, де $r\in \mathbf{Z}$

випливає з основного правила побудови **U(a, b),** з означення лінійного розкладу Фібоначчі та формули (5).

Тому нам досить показати, що $\sum_{i\in I(a)+1} u_i(a, -a_1) = (a^2 - a_1 \cdot (a+a_1))$.

Враховуючи (1),

$\sum_{i\in I(a)+1} u_i(a,-a_1) = a_0\cdot F_{i1} - a_1\cdot F_{i1+1} + a_0\cdot F_{i2} - a_1\cdot F_{i2+1} + \ldots + a_0\cdot F_{it} + a_1\cdot F_{it+1} = a_0\cdot (F_{i1} + F_{i2} + \ldots + F_{it}) - a_1\cdot (F_{i1+1} + F_{i2+1} + \ldots + F_{it+1}) = a_0\cdot a_0 - a_1\cdot (a+a_1)$. ■

**Теорема 4.** Справедливими є формули:

$\sum_{i\in I(a)\setminus\{i1\}} u_i(a, -a_1 + F_{i1-1}) = -F_{i1}\cdot (F_{i1-1} - a_1)$; (8)

$\sum_{i\in I(a)\setminus\{i1\}} u_i(a, -a_1 + F_{i1+1}) = F_{i1}\cdot (a + a_1 - F_{i1+1})$; (9)

$\sum_{i\in I(a)\setminus\{i1\}} u_i(a, -a_1 + F_{i1+2}) = -F_{i1}\cdot (2a + a_1 - F_{i1+2})$; (10)

$\sum_{i\in I(a)\setminus\{i1\}} u_i(a, -a_1 + V_{i1}) = \mathrm{abs}(u_{-i1}(a, -a_1 + V_{i1}))$. (11)

*Доведення.* Для доведення співвідношень (8) — (10) скористаємось властивістю (3) послідовності (*).

Тому $u_{i1}(a, -a_1 + F_{i1-1}) = u_{i1}(a, 0) + F_{i1}\cdot (F_{i1-1} - a_1) = F_{i1-1}\cdot a + F_{i1}\cdot (F_{i1-1} - a_1)$.

На основі (6) $\sum_{i\in I(a)} u_i(a, -a_1 + F_{i1-1}) = a\cdot F_{i1-1}$.

Тому $\sum_{i\in I(a)\setminus\{i1\}} u_i(a, -a_1 + F_{i1-1}) = \sum_{i\in I(a)} u_i(a, -a_1 + F_{i1-1}) - u_{i1}(a, -a_1 + F_{i1-1}) = F_{i1-1}\cdot a - (F_{i1-1}\cdot a + F_{i1}\cdot (F_{i1-1} - a_1)) = -F_{i1}\cdot (F_{i1-1} - a_1)$.

Формулу (8) доведено.

Далі, $u_{i1}(a, -a_1 + F_{i1+1}) = u_{i1}(a, a) - F_{i1}\cdot (a + a_1 - F_{i1-1}) = F_{i1+1}\cdot a - F_{i1}\cdot (a + a_1 - F_{i1-1})$.

На основі (6) $\sum_{i\in I(a)} u_i(a, -a_1 + F_{i1+1}) = a\cdot F_{i1+1}$.

Тому $\sum_{i\in I(a)\setminus\{i1\}} u_i(a, -a_1 + F_{i+1}) = \sum_{i\in I(a)} u_i(a, -a_1 + F_{i+1}) - u_{i1}(a, -a_1 + F_{i1+1}) = F_{i1+1}\cdot a - (F_{i1+1}\cdot a - F_{i1}\cdot (a + a_1 - F_{i1-1})) = F_{i1}\cdot (a + a_1 - F_{i1-1})$.

Формулу (9) доведено.

Аналогічно

$u_{i1}(a, -a_1 + F_{i1+2}) = u_{i1}(a, 2a) + F_{i1}\cdot (2a + a_1 - F_{i1-1}) = F_{i1+2}\cdot a + F_{i1}\cdot (2a + a_1 - F_{i1-1})$.

На основі (6) $\sum_{i\in I(a)} u_i(a, -a_1 + F_{i1+2}) = a\cdot F_{i1+2}$.

Тому $\sum_{i\in I(a)\setminus\{i1\}} u_i(a, -a_1 + F_{i1+2}) = \sum_{i\in I(a)} u_i(a, -a_1 + F_{i1+2}) - u_{i1}(a, -a_1 + F_{i1+2}) = F_{i1+2}\cdot a - (F_{i1+2}\cdot a + F_{i1}\cdot (2a + a_1 - F_{i1-1})) = -F_{i1}\cdot (2a + a_1 - F_{i1-1})$.

Формулу (10) доведено.

Для доведення співвідношення (11) скористаємось властивістю (4) послідовності (*). Тому

$u_{i1}(a, -a_1 + V_{i1}) = a\cdot V_{i1} + (-1)^{i+1} u_{-i}(a, -a_1 + V_{i1})$.

На основі (6) $\sum_{i\in I(a)} u_i(a, -a_1 + V_{i1}) = a\cdot V_{i1}$.

Тому $\sum_{i\in I(a)\setminus\{i1\}} u_i(a, -a_1 + V_{i1}) = \sum_{i\in I(a)} u_i(a, -a_1 + V_{i1}) - u_{i1}(a, -a_1 + V_{i1}) = V_{i1}\cdot a - (a\cdot V_{i1} + (-1)^{i+1} u_{-i}(a, -a_1 + V_{i1})) = (-1)^i u_{-i}(a, -a_1 + V_{i1})$.

Теорему доведено.

**Теорема 5.** Справедливими є формули:

$\sum_{i\in I(a)+2k} u_i(a, a+a_1) = u^2_{k+1}(a, a+a_1) - u^2_{k-1}(a, a+a_1)$; (12)

$\sum_{i\in I(a)+2k-1} u_i(a, a+a_1) = u^2_{k}(a, a+a_1) + u^2_{k-1}(a, a+a_1)$, (13)

де $k\in \mathbf{Z}$.

*Доведення.* На основі (3) / $j = i_s + k - 1$ /

$\sum_{i\in I(a)+2k} u_i(a, a+a_1) = u_{k+1}(a, a+a_1)\cdot F_{i1+k+1} - u_{k-1}(a, a+a_1)\cdot F_{i1+k-1} + u_{k+1}(a, a+a_1)\cdot F_{i2+k+1} - u_{k-1}(a, a+a_1)\cdot F_{i2+k-1} + \ldots + u_{k+1}(a, a+a_1)\cdot F_{it+k+1} - u_{k-1}(a, a+a_1)\cdot F_{it+k-1} = u_{k+1}(a, a+a_1)\cdot (F_{i1+k+1} + F_{i2+k+1} + \ldots + F_{it+k+1}) - u_{k-1}(a, a+a_1)\cdot (F_{i1+k-1} + F_{i2+k-1} + \ldots + F_{it+k-1}) = u^2_{k+1}(a, a+a_1) - u^2_{k-1}(a, a+a_1)$.

Формулу (12) доведено.

На основі (2) / $j = i_s + k - 1$ /

$\sum_{i\in I(a)+2k-1} u_i(a, a+a_1) = u_k(a, a+a_1)\cdot F_{i1+k} + u_{k-1}(a, a+a_1)\cdot F_{i1+k-1} + u_k(a, a+a_1)\cdot F_{i2+k} + u_{k-1}(a, a+a_1)\cdot F_{i2+k-1} + \ldots + u_k(a, a+a_1)\cdot F_{it+k} + u_{k-1}(a, a+a_1)\cdot F_{it+k-1} = u_k(a, a+a_1)\cdot (F_{i1+k} + F_{i2+k} + \ldots + F_{it+k}) + u_{k-1}(a, a+a_1)\cdot (F_{i1+k1} + F_{i2+k1} + \ldots + F_{it+k-1}) = u^2_{k}(a, a+a_1) + u^2_{k-1}(a, a+a_1)$.

Формулу (13) доведено.

Теорему доведено. ■


1. *Матиясевич Ю. В.* Перечислимые множества являются диофантовыми // Докл. АН СССР.– 1970.— № 191.— С. 279—282.

2. *Кнут Д.* Искусство программирования для ЭВМ.— Т. 3.— М., Мир.— 1978.— 840 с.

3. *Floyd R. W., Knuth D. E.* Addition Machines. // SIAM J. of Computing.— 1990.— 19.— № 2.— P. 329—340.

4. *Анисимов А. В.* Линейные формы Фибоначчи и параллельные алгоритмы арифметики большой размерности. // Кибернетика и системный анализ. 1995.— № 3. — С. 106—115.


*Kravchenko I. V.*

# FIBONACCI LINEAR DIVISION OF NATURAL NUMBER


Considered are the characteristics of the partial sums of the recurrent sequences elements which are the simple generalization of the Fibonacci numbers.