УДК 517.98

Городній М. Ф.

Lp-РОЗВ'ЯЗКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З ОБМЕЖЕНИМ ОПЕРАТОРНИМ КОЕФІЦІЄНТОМ

Досліджено питання про існування та єдиність у просторі $L_p(R,B)$ розв'язку x диференціального рівняння $x'(t) = Ax(t) + y(t)$, $t \in R$. Тут A — лінійний обмежений оператор у комплексному банаховому просторі B, $y \in L(R,B)$.

Нехай B — комплексний банахів простір з нормою $\|.\|$ та нульовим елементом $\vec{0}$; $L(B)$ — банахів простір усіх лінійних обмежених операторів, що діють з B в B; I — одиничний, O — нульовий оператори в B. Зафіксуємо $p \in [1;+\infty)$ і покладемо

$$l_p(B) := \left\{ \vec{x} := \{x(n) : n \in \mathbb{Z}\} \subset B \;\middle|\; |\vec{x}|_p := \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|x(n)\|^p \right)^{1/p} < +\infty \right\}$$

$\left(l_p(B), |\cdot|_p\right)$ — банахів простір з покоординатним додаванням елементів і множенням на комплексне число.

Нехай $T \in L(B)$. Справджується

Теорема 1. *(див. [1]). Різницеве рівняння $x_{n+1} = Tx_n + y_n$, $n \in \mathbb{Z}$, має для довільного*

$$\vec{y} = \{y_n : n \in \mathbb{Z}\} \in l_p(B)$$

єдиний розв'язок $\vec{x} = \{x_n : n \in \mathbb{Z}\}$ у просторі $l_p(B)$ тоді й тільки тоді, коли спектр $\sigma(T)$ оператора T не перетинається з одиничним колом $S := \{z \in C : |z| = 1\}$.

Мета цієї роботи — отримати аналогічний результат для випадку лінійного диференціального рівняння з обмеженим операторним коефіцієнтом.

У подальшому використовуються банахів простір $L_p := L_p(R,B)$ (див. [2], с. 102) і такі класи B-значних функцій:

$$C_b := \{f \in C(\mathbb{R},B) : \|f\|_\infty := \sup_{t\in R} \|f(t)\| < +\infty\};$$

$$C_b^1 := \{f \in C^1(\mathbb{R},B) : \|f\|_{1,\infty} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty < +\infty\};$$

$$L_p^1 := \{f \in C^1(R,B) : \{f, f'\} \subset L_p\}.$$

Тут і нижче неперервність і похідні розглядаються в сильному сенсі.

Для $f \in L_p^1$ покладемо $\|f\|_{1,p} := \|f\|_p + \|f'\|_p$ і позначимо символом W_p^1 замикання L_p^1 за $\|\cdot\|_{1,p}$. Відзначимо, що $(C_b, \|\cdot\|_\infty)$, $\left(C_b^1, \|\cdot\|_{1,\infty}\right)$, $\left(W_p^1, \|\cdot\|_{1,p}\right)$ — банахові простори.

Нехай A — фіксований оператор з $L(B)$. Згідно з відомою теоремою М. Г. Крейна (див. [3], с. 119) диференціальне рівняння

$$x'(t) = Ax(t) + y(t),\ t \in R, \tag{1}$$

має для довільної $y \in C_b$ єдиний розв'язок x в просторі C_b^1 тоді і тільки тоді, коли $\sigma(A)$ не перетинається з уявною віссю $iR := \{it : t \in R\}$. Цей розв'язок зображується у вигляді

$$x(t) = \int_R G(t-s)\, y(s)\, ds,\ t \in R, \tag{2}$$

де $G(t)$, $t \in R$, — функція Гріна для рівняння (1). Зауважимо, що $G \in L_1(R, L(B))$.

Нехай $y \in L_p \cap C(R,B)$. Функцію $x : R \to B$ будемо називати відповідним y L_p-розв'язком рівняння (1), якщо $x \in L_p$, а також для кожного $t \in R$ існує $x'(t)$ і справджується рівність (1).

Основний результат статті містить

Теорема 2. *Для того щоб для довільної $y \in L_p \cap C(R,B)$ рівняння (1) мало єдиний L_p-розв'язок, необхідно і достатньо, щоб*

$$\sigma(A) \cap iR = \emptyset.$$

Доведення. **Достатність.** Нехай $\sigma(A) \cap iR = \emptyset$. Внаслідок теореми М. Г. Крейна для $y \in L_p \cap C_b$ рівняння (1) має в просторі C_b єдиний розв'язок x, який зображується у вигляді (2). З урахуванням нерівності Юнга ([4], с. 318) x є L_p-розв'язком рівняння (1), відповідним y.

Неважко переконатися, що для необмеженої $y \in L_p \cap C(R,B)$ побудована за допомогою формули (2) функція x також є відповідним y L_p-розв'язком рівняння (1).

Перевіримо єдиність цього розв'язку. Якщо, від супротивного, деякій $y \in L_p \cap C(R,B)$ відповідає кілька L_p-розв'язків рівняння (1), то однорідне рівняння

$$u'(t) = Au(t)\ \ t \in R, \tag{3}$$

має ненульовий, необмежений внаслідок теореми М. Г. Крейна L_p-розв'язок u. Отже, знайдеться таке $t_0 \in R$, що $u(t_0) \neq \vec{0}$.

Оскільки $\sigma(A) \cap iR = \emptyset$, то

$$\sigma(A) = \sigma_+(A) \cap \sigma_-(A),$$

де $\sigma_+(A)$, $\sigma_-(A)$ — замкнені множини, які лежать відповідно в правій та лівій півплощинах C. У подальшому вважатимемо, що $\sigma_\pm(A)$ — непорожні множини. Тоді згідно з ([3], с. 119, 121) простір B розкладається в пряму суму інваріантних відносно оператора A підпросторів $B_\pm$; звуження $A_\pm$ оператора A на $B_\pm$ є лінійними обмеженими операторами зі спектрами $\sigma_\pm(A)$. Нехай $P_\pm$ — проектори в B відповідно на підпростори $B_\pm$, $u_\pm(t) = P_\pm u(t)$, $t \in R$. Тоді один з елементів $u_\pm(t_0)$ відмінний від $\vec{0}$.

Розглянемо випадок, коли $u_-(t_0) \neq \vec{0}$, а отже, $\gamma := \|u_-(t_0)\| > 0$. Тоді

$$\exists 0 < \nu < 1/3\ \forall s, |t_0 - s| \leq \nu : \|u_-(s)\| \geq \gamma/2. \quad (4)$$

Подіявши на (3) проектором P_-, отримаємо

$$u'_-(t) = A_- u_-(t), t \in R,$$

а отже,

$$\forall s_0 \in R \forall s \geq s_0 : u_-(s) = \exp(A_-(s - s_0))\, u_-(s_0),$$

причому

$$\exists K > 0\, \exists \delta > 0\, \forall s \geq s_0 : \|\exp(A_-(s - s_0))\| \leq K \exp(-\delta(s - s_0)). \quad (5)$$

Тому для довільних s, $|t_0 - s| \leq \nu$ та $m \in \mathrm{N}$ матимемо

$$u_-(s) = \exp(A_-(m + t_0))\, u_-(-m + s - t_0),$$

звідки з урахуванням (4, 5)

$$\gamma/2 \leq \|u_-(s)\| \leq \leq K \exp(-\delta(m + t_0)) \|u_-(-v + s - t_o)\|,$$

а отже,

$$\|u_-(-m + s - t_0)\| \geq \frac{\gamma \exp(\delta(m + t_0))}{2K}. \quad (6)$$

Внаслідок (6) $u_- \notin L_p$, що суперечить включенню $u \in L_p$.

Випадок $u_+(t_0) \neq \vec{0}$ розглядається аналогічно.

Таким чином, єдиність L_p-розв'язку рівняння (1) доведено.

Необхідність. Нехай для довільної $y \in L_p \cap C(R, B)$ рівняння (1) має єдиний L_p-розв'язок x. Зафіксуємо $\vec{y} := \{y_n : n \in \mathrm{Z}\} \in l_p(B)$ і доведемо, що різницеве рівняння

$$x_{n+1} = \ell^A x_n + y_n, n \in \mathrm{Z}, \quad (7)$$

має розв'язок $\vec{x} \in l_p(B)$. Для цього виберемо таку невід'ємну функцію $\psi \in C([0;1])$, що

$$\int_0^1 \psi(t)\, dt = 1, \psi(0) = \psi(1) = 0,$$

і покладемо

$$y(n + \tau) = \psi(\tau) \ell^{(\tau - 1)A} y_n, \quad \tau \in [n; n + 1]; n \in \mathrm{Z}. \quad (8)$$

Визначена за допомогою (8) функція $y(t)$, $t \in R$, належить простору $L_p \cap C(R; B)$. Нехай x — відповідний y L_p-розв'язок рівняння (1). Скориставшись зображенням розв'язку задачі Коші

$$x'(t) = Ax(t) + y(t), t \geq t_0; x(t_0) = x_0,$$

(див. [3], с. 105), для кожного $n \in \mathrm{Z}$ матимемо

$$x(n + 1) = \ell^A x(n) + + \int_n^{n+1} \ell^{A(n+1-s)} y(s) ds = \ell^A x(n) + y_n,$$

тобто $\{x(n) : n \in \mathrm{Z}\}$ — розв'язок рівняння (7). Неважко переконатися, що цей розв'язок належить простору $l_p(B)$.

Перевіримо єдиність розв'язку рівняння (7) у просторі $l_p(B)$. Якщо, від супротивного, деякому $\vec{y} \in l_p(B)$ відповідають кілька розв'язків, то в просторі $l_p(B)$ існує ненульовий розв'язок $\vec{u}$ однорідного рівняння $u_{n+1} = \ell^A u_n$, $n \in \mathrm{Z}$. З урахуванням властивостей операторної експоненти цей розв'язок зображується у вигляді

$$u_n = \ell^{nA} u_0, \ n \in \mathrm{Z}. \quad (9)$$

Скориставшись рівностями (9), можна довести, що однорідне рівняння (3) має ненульовий L_p-розв'язок $u(t) = \ell^{At} u_0$, $t \in R$, що суперечить єдиності L_p-розв'язку.

Таким чином, до рівняння (7) можна застосувати твердження теореми 1, згідно з яким $\sigma(\ell^A) = \emptyset$. Звідси внаслідок теореми Данфорда про відображення спектра робимо висновок, що $\sigma(A) \cap iR = \emptyset$.

Теорему 2 доведено.

Визначимо оператор $V : W_p^1 \to L_p$ співвідношенням

$$(Vg)(t) = g'(t) - Ag(t), \ t \in R; \ g \in W_p^1.$$

Тут g' — узагальнена похідна функції $g \in W_p^1$. Неважко переконатися, що V — лінійний неперервний оператор. Також справджується

Теорема 3. *Якщо $\sigma(A) \cap iR = \emptyset$, то оператор V має обмежений обернений оператор V^{-1}, причому*

$$(V^{-1}y)(t) = = \int_R G(t - s)\, y(s)\, ds, \ t \in R; \ y \in L_p. \quad (10)$$

І навпаки, якщо оператор V має обмежений обернений оператор V^{-1}, то $\sigma(A) \cap iR = \emptyset$, а також V^{-1} визначається формулою (10).

Зауваження. У правій частині рівності (10) використовується інтеграл у сенсі Бохнера. Цей інтеграл збіжний внаслідок нерівності Юнга.

Доведення. Нехай $\sigma(A) \cap iR = \emptyset$. Оскільки множини L_p^1 та $L_p \cap C(R, B)$ скрізь щільні відповідно в просторах W_p^1 та L_p, то, скориставшись теоремою 2, неважко перевірити, що визначений співвідношенням (10) оператор V^{-1} є лінійним і обмеженим, а також VV^{-1} і $V^{-1}V$ — одиничні оператори відповідно в L_p і W_p^1, а отже, V^{-1} — обернений оператор до оператора V.

Доведемо другу частину теореми. Зафіксуємо $f \in L_p \cap C(R, B)$. З існування оберненого оператора V^{-1} до оператора V випливає, що операторне рівняння $Vx = f$ має єдиний розв'язок x у просторі W_p^1. Тому, з урахуванням теореми 2, досить переконатися, що знайдеться така функція $u \in L_p^1$, що $x = u$ і $x' = u'$ майже скрізь відносно міри Лебега на R.

Оскільки множина L_p^1 скрізь щільна в W_p^1, то можна вибрати таку послідовність $\{x_m : m \geq 1\} \subset L_p^1$, що

$$\|x_m - x\|_p \to 0, \|x_m' - x'\|_p \to 0; m \to \infty. \quad (11)$$

Тому внаслідок теореми Ф. Рісса існує така підпослідовність $\{x_{m(k)} : k \geq 1\}$ послідовності $\{x_m : m \geq 1\}$, що майже скрізь за мірою Лебега на R

$$x_{m(k)} \to x, x_{m(k)}' \to x'; k \to \infty, \quad (12)$$

а отже,

$$\forall j \in \mathrm{N}\ \exists t(j) < -j :$$
$$x_{m(k)}(t(j)) \to x(t(j)), k \to \infty. \quad (13)$$

Зафіксуємо $j \in \mathrm{N}$ і покладемо

$$f_{m(k)}(t) := x_{m(k)}'(t) - Ax_{m(k)}(t),$$
$$t \in R;\ k \geq 1. \quad (14)$$

Тоді $f_{m(k)} \in L_p^1 \cap C(R, B)$, $\|f_{m(k)} - f\|_p \to 0$, $k \to \infty$, а також

$$\forall t \in [t(j); j] : x_{m(k)}(t) = \ell^{A(t-t(j))} x_{m(k)}(t(j)) +$$
$$+ \int_{t(j)}^{t} \ell^{A(t-s)} f_{m(k)}(s)\, ds. \quad (15)$$

Нехай $u_j(t) := \vec{0},\ t \notin [t(j); j]$,

$$u_j(t) := \ell^{A(t-t(j))} x(t(j)) +$$
$$+ \int_{t(j)}^{t} \ell^{A(t-s)} f(s)\, ds, t \in [t(j); j]. \quad (16)$$

Неважко переконатися, що $u_j \in C^1([t(j); j], B)$ і внаслідок (11–16) $x_{m(k)} \to u_j$, $k \to \infty$, рівномірно на $[t(j); j]$, а також $\left\| x_{m(k)}' \chi_{[t(j);j]} - u_j' \chi_{[t(j);j]} \right\|_p \to 0$, $k \to \infty$. Тут $\chi_{[t(j);j]}$ позначає індикатор відрізка $[t(j); j]$. Тому з урахуванням (12) майже скрізь відносно міри Лебега на $[t(j); j]$

$$u_j = x,\ u_j' = x'. \quad (17)$$

Оскільки для довільних натуральних $j < q$ функції u_j, u_q неперервні на $[t(j); j]$, то внаслідок (17) ці функції збігаються на $[t(j); j]$. Тому на R існує поточкова границя u послідовності $\{u_j : j \geq 1\}$, причому $u \in C^1(R, B)$, а також, з урахуванням (17), майже скрізь відносно міри Лебега на R $x = u$, $x' = u'$, звідки додатково $u \in L_p^1$.

Теорему 3 доведено.

Відмітимо, що близький до отриманого в теоремі 3 результат випливає з теореми М. Г. Крейна та теореми 1 з [5], де розглядається оператор $L : W_p^1 \to L_p$, який діє за правилом

$$(Lf)(t) = f'(t) - A(t)f(t),\ t \in R;\ f \in W_p^1.$$

Тут $A(t)$, $t \in R$, — сильно неперервна на R функція зі значеннями в $L(B)$, причому $\sup\{\|A(t)\| : t \in R\} < +\infty$. На відміну від теореми 3 в [5] досліджується тільки питання про неперервну оборотність оператора L на його області значень $R(L)$. При цьому використовується підхід, відмінний від запропонованого при доведенні теореми 3.

1. *Баскаков А. Г., Пастухов А. И.* Спектральный анализ оператора взвешенного сдвига с неограниченными операторными коэффициентами // Сиб. мат. журн.— 2001.— Т. 42, № 6.— С. 1231-1243.
2. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы.— М., 1962.
3. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.— М., 1970.
4. *Стейн И. М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.— М., 1973.
5. *Тюрин В. М.* Об обратимости оператора *d/dt — A(t)* в некоторых функциональных пространствах // Матем. заметки.— 1979.- Т. 25, № 4.- С. 585-590.

M. F. Gorodnii

Lp-SOLUTIONS TO DIFFERENTIAL EQUATION WITH THE BOUNDED OPERATOR COEFFICDENT

We investigate the question of the existence and uniqueness of solution x belonging to the space $L_p(R, B)$ for the differential equation $x'(t) = Ax(t) + y(t)$, $t \in R$. Here A is a bounded linear operator in a complex Banach space B, and $y \in L_p(R, B)$.